ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: Πραγματικοί Αριθμοί

Ιδιότητες Δυνάμεων

- $\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$, όπου $\mu, \nu \in \mathbb{N}$
- $\alpha^{\mu} \div \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$, όπου $\mu, \nu \in \mathbb{N}$, $\mu > \nu$ και $\alpha \neq 0$

  ή $\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{\mu-\nu}$, όπου $\mu, \nu \in \mathbb{N}$, $\mu > \nu$ και $\alpha \neq 0$
- $(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu \cdot \nu}$, όπου $\mu, \nu \in \mathbb{N}$
- $(\alpha \cdot \beta)^{\nu} = \alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu}$, όπου $\nu \in \mathbb{N}$ και $\alpha, \beta \neq 0$
- $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$, όπου $\nu \in \mathbb{N}$ και $\beta \neq 0$

- $\alpha^{\mu} = \alpha^{\nu} \Leftrightarrow \mu = \nu$ όπου $\mu, \nu \in \mathbb{N}$, $\alpha \neq 0$ και $\alpha \neq \pm 1$
  - Οι πιο πάνω ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη φυσικό αριθμό, ισχύουν και στις περιπτώσεις που ο εκθέτης των δυνάμεων είναι οποιοσδήποτε **ακέραιος αριθμός**.

- $\alpha^{-\mu} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\mu} = \frac{1}{\alpha^{\mu}}$, όπου $\alpha \in \mathbb{Q}, \mu \in \mathbb{Z}$ και $\alpha \neq 0$

  - <u>Παρατήρηση:</u> Το 0^0 δεν ορίζεται.

Τετραγωνική Ρίζα Αριθμού

$$\boxed{\sqrt{\alpha} = \beta \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha \text{ , όπου } \alpha \geq 0, \beta \geq 0}$$

Από τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας έχουμε:

- $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$
- Αν $\alpha \geq 0$, τότε $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2 = \alpha$

Κυβική ή Τρίτη Ρίζα αριθμού

$$\boxed{\sqrt[3]{\alpha} = \beta \Leftrightarrow \beta^3 = \alpha \text{ , όπου } \alpha \geq 0, \beta \geq 0}$$

Από τον ορισμό της κυβικής ρίζας έχουμε:

- Αν $\alpha \geq 0$, τότε $\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^3 = \alpha$

▪ **Ιδιότητες Ριζών**

➢ **Τετραγωνική ρίζα**

i. $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$, $\quad \alpha,\ \beta \geq 0$

ii. $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$, $\quad \alpha \geq 0,\ \beta > 0$

➢ **Κυβική ρίζα**

iii. $\sqrt[3]{\alpha \cdot \beta} = \sqrt[3]{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\beta}$, $\quad \alpha, \beta \geq 0$

iv. $\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt[3]{\alpha}}{\sqrt[3]{\beta}}$, $\quad \alpha \geq 0,\ \beta > 0$

Προσοχή!!

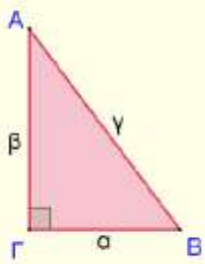
Αν $\alpha, \beta \geq 0$, τότε:

- $\sqrt{\alpha + \beta} \neq \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$
- $\sqrt{\alpha - \beta} \neq \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}$

▪ **Πυθαγόρειο Θεώρημα (Π.Θ.)**
Σε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο της υποτείνουσας είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών του.

Παράδειγμα:
Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{\Gamma} = 90°$) με υποτείνουσα τη γ και κάθετες πλευρές τις α και β ισχύει:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$$



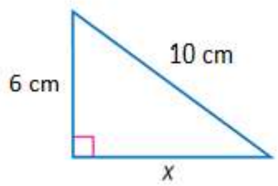
▪ Επίσης ισχύει και το **αντίστροφο**. Δηλαδή, αν σε τρίγωνο το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

▪ **Πυθαγόρεια τριάδα** είναι μια τριάδα φυσικών αριθμών $(0 < \alpha < \beta < \gamma)$ που συνδέονται με τη σχέση $\boldsymbol{\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2}$.

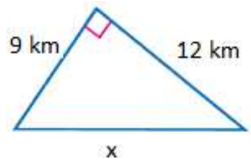
Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε το μήκος σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

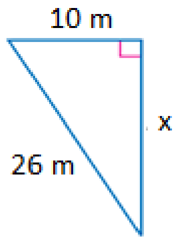
(α)



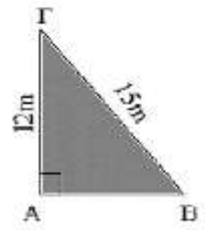
(β)



(γ)



2. Ένας άνθρωπος θέλει να αγοράσει το οικόπεδο του σχήματος.
   Αν το ένα τετραγωνικό μέτρο κοστίζει €900,
   πόσα χρήματα πρέπει να πληρώσει για την αγορά του οικοπέδου;



3. Να αντιστοιχίσετε κάθε παράσταση της στήλης Α με το αντίστοιχο αποτέλεσμα της στήλης Β.

Α	Β
1). $\sqrt{4}+\sqrt{9}+\sqrt{100}$	α. -8
2). $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$	β. 8
3). $\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{6}=$	γ. 10
4). $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$	δ. 4
5). $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$	ε. 3
6). $\left(\sqrt{10}\right)^2$	στ. 15
7). $\sqrt{(-8)^2}$	ζ. 5
	η. -3
	θ. 6
	ι. -4

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.

4. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω παραστάσεις :

(α) $\mathrm{A} = \sqrt{3} \cdot (\sqrt{27} + \sqrt{3})$

(β) $B = \sqrt{\frac{225}{81}} + \sqrt{\frac{16}{9}} \cdot \sqrt{\frac{169}{144}}$

(γ) $\Gamma = \sqrt{\sqrt{256}} - \sqrt{\sqrt{81}}$

(δ) $\Delta = \sqrt{29 - \sqrt{13 + \sqrt{9}}}$

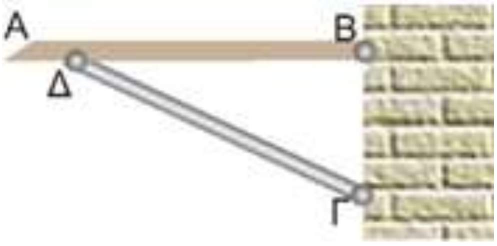
(ε) $E = \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt[3]{27}$

5. Δίνονται $\alpha = \sqrt{3 - \sqrt{7 - \sqrt{9}}}$, $\beta = \sqrt{\sqrt{\sqrt{81}}}$ και $\gamma = \sqrt{9 - \sqrt{21 + \sqrt{16}}}$.

(α) Να βρείτε τους αριθμούς α , β , γ.

(β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο με πλευρές α, β, γ είναι ορθογώνιο.

6. Ένας μαθητής δίπλα από το γραφείο του στον κατακόρυφο τοίχο τοποθέτησε ένα ράφι με μεταλλικό στήριγμα για να βάλει επάνω την κεντρική μονάδα του ηλεκτρονικού υπολογιστή. Αν το στήριγμα ΓΔ έχει μήκος 26 cm, η κατακόρυφη απόσταση ΒΓ είναι 10 cm και τα σημεία Β, Δ απέχουν 24 cm, να εξετάσετε αν το ράφι είναι οριζόντιο.



7. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω:

(α) $(\sqrt[3]{13+14})^3 =$

(β) $(\sqrt{25} - \sqrt{49})^{-1} =$

(γ) $\frac{3^3 \cdot 15^3}{(-7-2)^3} =$

(δ) $(5 - \sqrt{10})(5 + \sqrt{10}) =$

(ε) $\sqrt{52 - \sqrt{9}} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{8} =$

(στ) $\frac{\sqrt{24} \cdot \sqrt{50}}{2\sqrt{3}} =$

8. Να χαρακτηρίσετε με ***Σωστό*** ή ***Λάθος*** τις πιο κάτω προτάσεις.

(α) Οι αριθμοί 1 , 2 , $\sqrt{3}$ αποτελούν πυθαγόρεια τριάδα αριθμών. ----------

(β) $\sqrt[3]{0,027} > \frac{1}{2}$ ----------

(γ) Οι αριθμοί $\sqrt{42}$, 6 , 8 , $\sqrt{94}$ είναι τοποθετημένοι σε αύξουσα σειρά. ----------

(δ) Ο αριθμός $\sqrt{\frac{18}{9}}$ είναι άρρητος. ----------

9. Να εξετάσετε σε ποια σύνολα αριθμών ανήκει καθένας από τους πιο κάτω αριθμούς, συμπληρώνοντας με $\surd$ τις κατάλληλες στήλες:

Αριθμός	Φυσικός $\mathbb{N}$	Ακέραιος $\mathbb{Z}$	Ρητός $\mathbb{Q}$	Άρρητος $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$	Πραγματικός $\mathbb{R}$
7					
$\sqrt{11}$					
$1,\overline{3}$					
$1,3$					
$\sqrt{16}$					
$2,2360679...$					
$-\sqrt[3]{-8}$					

10. Να συμπληρώσετε τα κενά με τον κατάλληλο αριθμό, ώστε να ισχύουν οι ισότητες.

(α) $\square^{-2}=9$ (β) $(4^{\square}\cdot 7^2)^3=7^6\cdot 4^{12}$ (γ) $\sqrt{\square+\sqrt{25}}=7$ (δ) $\sqrt{(-15)^2}-\sqrt[3]{\square}=5$

11. Να υπολογίσετε την τιμή του x:

$\alpha)(-5)^{-2}\cdot(-5)^x\cdot(-5)=(-5)^9$ $\beta)\ \left(\frac{1}{7}\right)^7:\left(\frac{1}{7}\right)^x=\left[\left(\frac{1}{7}\right)^3\right]^6$ $\gamma)\ \left(-\frac{11}{3}\right)^{-5}\left(-\frac{3}{11}\right)^x=1$

12. Να γράψετε τις παραστάσεις **σε μορφή μιας δύναμης**:

(α) $3^4\cdot 3^2=$ (β) $5^9\div 5^{-2}=$ (γ) $\left[(-a)^3\right]^2=$ (δ) $(\beta^4\cdot\beta^{-1})\cdot(\beta^8\div\beta^4)=$ (ε) $\left(\kappa^3\cdot\kappa\cdot\kappa\right)^{24}=$

(στ) $2^4\cdot 4\cdot 8=$ (ζ) $9\cdot 27^3\div 3^8=$ (η) $(25^{-2}\cdot 5^6)\cdot(5^{-8}\div 125)=$ (θ) $7^3\cdot 7^{-5}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}=$

(ι) $3^6\cdot 3^8\div(3^9)^2=$ (κ) $(-4)^{20}\div[-4\cdot(-4)^{-2}\cdot(-4)^{-3}]=$ (λ) $[(-5)^4\div 25]\cdot(\frac{1}{5})^3=$

(μ) $2^{-2}\cdot 2^8+2^{-3}\div 2^{-9}-2^{11}\cdot(\frac{1}{2})^5+(2^{-2})^{-3}+6\cdot(-2)^6=$ (ν) $8^3\cdot 64\cdot(8^2)^{-3}\cdot\frac{1}{8^{-5}}=$

13. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

(α) $(-2)^3+(-1)^5-4^0=$

(β) $6^2-3\cdot 2^3+10^2\div 5=$

(γ) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}+25\cdot 5^{-1}-3^3\div 3=$

(δ) $\sqrt{64}-4\cdot\sqrt[3]{27}-\sqrt{4^2+3^2}=$

(ε) $\sqrt[3]{(10+\sqrt{36})\cdot\sqrt{14+\sqrt{4}}}=$

(στ) $\dfrac{8^{-3}\cdot 4^6\cdot(\frac{1}{2})^{-5}}{16\div 2^{-2}}=$

(ζ) $16(-\frac{2}{3})^{-2}-[(-5)^{10}\div(-5)^8-(-27)^{-1}\cdot(-6+9)^3]=$

(η) $\sqrt{44}\div\sqrt{11}+\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}=$

(θ) $32+\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{3}=$

(ι) $\dfrac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{27}}{\sqrt{2}}=$